Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa i Statystyki

Zad. 1

Niech (Ω, F, P) będzie przestrzenią probabilistyczną oraz niech $A, B, A_1, A_2, \ldots, A_n \in F$. Pokazać że:

Podpunkt 1

Prawdopodobieństwo zdarzenia niemożliwego jest równe zero

$$P(\emptyset) = 0$$

Wezmy przykladowa przestrzen Ω zawierajaca wszystkie mozliwe zdarzenia, ktore zachodza i wezmy przeciwstawne puste zdarzenie $\emptyset$, ktore nigdy nie zachodzi.

$$P(\Omega) = 1 \quad i \quad P(\emptyset) = 0$$

Dowod:

$$P(\Omega \cup \emptyset) = P(\Omega) + P(\emptyset)$$

Poniewaz Ω i $\emptyset$ sa wzajemnie sie wykluczajace zatem:

$$P(\emptyset) = 0$$

Podpunkt 2

Skończona addytywność. Jeżeli $A_1, A_2, \ldots, A_n$ wykluczają się parami (tj, $A_i \cap A_j = 0$ dla $i \neq j$), to

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$$

Poniewaz sa one parami rozlaczne

$$P(A_i \cap A_j) = \emptyset, i \neq j$$

Podpunkt 3

$$P(A') = 1 - P(A)$$

Wezmy zdarzenia A i A' takie, ze $P(A \cup A') = \Omega$ i sa one rozlaczne.

Stad wiemy, ze:

$$P(A) + P(A') = P(A \cup A') = P(\Omega) = 1$$

Stad:

$$P(A') = 1 - P(A)$$

Podpunkt 4

Jeśli $A \subset B$, to

$$P(B \setminus A) \leq P(B) - P(A)$$

Jesli $A \subset B$ to $B = A \cup (B \setminus A)$ i $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$
Stad:

$$P(B) = P(A) + P(B \setminus A)$$

$$P(B \setminus A) \geq 0$$

Stad mamy, ze:

$$P(B) \geq P(A)$$

Podpunkt 5

$$P(A) \leq 1$$

Zalozmy, ze Ω jest przestrzenia zawierajaca wszystkie zdarzenia A, wtedy:

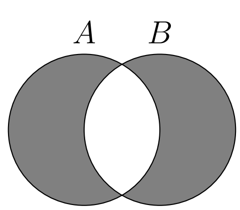
$$P(\Omega) = 1$$

$$P(A) \leq P(\Omega) = 1$$

Podpunkt 6

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Wynika z ponizszego diagramu.



Zad. 2

$$\Omega = \{(o,o,o),(o,o,r),(o,r,o),(o,r,r),(r,o,o),(r,o,r),(r,r,o),(r,r,r)\}$$

Prawdopodobieństwo wylosowania trzech reszek pod rząd:

$$P(A) = \frac{1}{8}$$

Prawdopodobieństwo wylosowania nieparzystej ilości reszek:

$$P(B) = \frac{4}{8}$$

Prawdoposobieństwo warunkowe zdarzenia A pod warunkiem zdarzenia B

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(\{(r,r,r)\} \cap \{(o,o,r),(o,r,o),(r,o,o),(r,r,r)\})}{P(\{(o,o,r),(o,r,o),(r,o,o),(r,r,r)\})} =$$

$$\frac{\frac{1}{8}}{\frac{4}{8}} = \frac{1}{8} \cdot \frac{8}{4} = \frac{1}{4}$$

Zad. 3

C - Chłopiec
D - Dziewczynka
$\Omega = \{(C,D),(C,C),(D,D),(D,C)\}$

a) starsze dziecko jest chłopcem.
$A = \{(C,C)\}$ - rodzina z dwoma chłopcami.
B = {(D,C), (C,C)} - starsze dziecko jest chłopcem.
$A \cap B = \{(C,C)\}$

$P(B) = \frac{1}{2}$
$P(A \cap B) = \frac{1}{4}$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

b) jest co najmniej jeden chłopiec.
A = {(C,C)} - rodzina z dwoma chłopcami.
B = {(C,D), (C,C), (D,C)} - co najmniej jeden chłopiec.
$A \cap B = \{(C,C)\}$

$P(B) = \frac{3}{4}$
$P(A \cap B) = \frac{1}{4}$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

Zad. 4

Firma produkuje 98% wyrobów odpowiadających normie. Wśród wyrobów spełniających normę jest 75% wyrobów pierwszego gatunku. Obliczyć prawdopodobieństwo, że losowo wybrany wyrób jest pierwszego gatunku.

B - przeszedl norme 98%
A - zostal wybrany 1 gatunek
P(A) = ?

$$P(A|B) = 0,75$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Stad

$$0,75 = \frac{P(A \cap B)}{0,98}$$

$$P(A) = P(A \cap B) = 0,75 * 0,98 = 0,735$$

Zad. 5

Razem mamy 30 kul - 10 bialych, 20 czarnych. Prawdopodobienstwo wylosowania 3 kul bialych wynosi: /begincenter $(10 * 9 * 8)/(30 * 29 * 28) = (6/203)$ /endcenter **Zad. 6**

Pierwsza urna zawiera 4 białe i jedną czarną kule, druga - 2 białe i 3 czarne. Losujemy urnę tak, by szansa wybrania pierwszej urny była dwukrotnie mniejsza niż drugiej. Następnie z wybranej urny losujemy kulę. Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej?

Rozwiązanie:

$$P(H_1) \; - \; prawdopodobienstwo \; wyboru \; pierwszej \; urny$$

$$P(H_2) \; - \; prawdopodobienstwo \; wyboru \; drugiej \; urny$$

Z treści zadania wiemy, że:

$$P(H_2) = 2 * P(H_1)$$

wiadomo również, że:

$$P(H_1) + P(H_2) = 1$$

Rozwiązując układ równań otrzymujemy:

$$P(H_1) = \frac{1}{3}$$

$$P(H_2) = \frac{2}{3}$$

Podstawiając do wzoru na prawdopodobieństwo całkowite otrzymujemy:

$$P(A) = P(A|H_1) * P(H_1) + P(A|H_2) * P(H_2) = \frac{4}{5} * \frac{1}{3} + \frac{2}{5} * \frac{2}{3} = \frac{8}{15}$$

gdzie:

$$P(A|H_1)\ -\ prawdopodobienstwo\ wylosowania\ bialej\ kuli\ z\ pierwszej\ urny$$

$$P(A|H_2)\ -\ prawdopodobienstwo\ wylosowania\ bialej\ kuli\ z\ drugiej\ urny$$

Zadanie można też rozwiązać przy pomocy drzewka. W takim przypadku mnożymy prawdopodobieństwo wyboru urny przez prawdopodobieństwo wyboru białej kuli z tej urny. Robimy tak z obiema urnami i wyniki iloczynów sumujemy.

Zad. 7

Mamy w urnie b kul białych i c czarnych. Wyciagąmy jedną kulę i natychmiast ją wyrzucamy, nie sprawdzając koloru. Jaka jest szansa wyciągnięcia za drugim razem kuli białej.

A_1 - za pierwszym razem wypadła kula biała
A_2 - za pierwszym razem wypadła kula czarna
B - za drugim razem wypadła kula biała

Zatem P(B) = P(B|A_1)*P(A_1) + P(B|A_2)*P(A_2)

Po podstawieniu wartosci: P(B) = $\frac{b}{b+c} * \frac{b-1}{b+c-1} + \frac{c}{b+c} * \frac{b}{b+c-1} = \frac{b}{b+c}$ **Zad. 8**

Doswiadczenie: Mamy w urnie b kul bialych i c czarnych. Wyciagamy jedna kule i natychmiast ja wyrzucamy, nie sprawdzajac koloru. Nastepnie losujemy kolejna kule. Jakie jest prawdopodobienstwo ze biala jest kula z pierwszego losowania, gdy biala jest kula z drugiego losowania.

H1 - za pierwszym razem losujemy czarna kule

$$P(H1) = \frac{c}{b+c}$$

H2 - za pierwszym razem losujemy biala kule

$$P(H2) = \frac{b}{b+c}$$

A - za drugim razem losujemy kule biala

$$P(A) = \frac{c}{b+c} * \frac{b}{b+c-1} + \frac{b}{b+c} * \frac{b-1}{b+c-1}$$

P(H2|A) - prawdopodobienstwo wylosowania kuli bialej w pierwszym losowaniu pod warunkiem ze w drugim zostala wylosowana kula biala. Z tw Bayesa mamy:

$$P(H2|A) = \frac{P(A|H2)P(H2)}{P(A)}$$

a prawdopodobienstwo wylosowania kuli bialej w drugim losowaniu pod warunkiem ze w pierwszym wylosowalismy biala to

$$P(A|H2) = \frac{b-1}{b+c-1}$$

czyli

$$P(H2|A) = \frac{\frac{b-1}{b+c-1} * \frac{b}{b+c}}{\frac{c}{b+c} * \frac{b}{b+c-1} + \frac{b}{b+c} * \frac{b-1}{b+c-1}}$$

po skroceniu otrzymujemy koncowy wynik:

$$P(H2|A) = \frac{b^2 - b}{b^2 - b + bc}$$

Zad. 10

Liczymy prawdopodobienstwo wystapienia defektu w inspekcji:
P(D) $= \frac{2}{10} * \frac{5}{100} + \frac{8}{10} * \frac{3}{10} = \frac{1}{4}$

Liczymy prawdopodobienstwo, ze modul przeszedl proces inspekcji:
P(I/D) $= \frac{P(D/I)*P(I)}{P(D)} = \frac{\frac{5}{100}*\frac{2}{10}}{\frac{1}{4}} = \frac{4}{100}$