5.10.2011

Bibliografie:

1. Șt. Mircă – Ec. diferențiale, I–III
Ed. Universității Buc.
2. I. Roșca – Ec. diferențiale ~~și~~ cu derivate parțiale
Ed. Fundației "România de Mâine", 2000
3. A. Cernea – Ec. diferențiale
Ed. Univ. Buc. 2009 sau 2010

Def → O ec. diferențială de ordin $k \in \mathbb{N}^*$ cu n componente pentru funcție necunoscută $x = (x_1, \dots, x_n)$ este descrisă prin expresie

$$F(t, x, x^{(1)}, \dots, x^{(k)}) = 0 \qquad (1)$$

sau, scrisă în formă cvasiliniară:

$$x^{(k)} = f(t, x, x^{(1)}, \dots, x^{(k-1)}) \qquad (2)$$

unde $F : G \subset \mathbb{R} \times \underbrace{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_{\text{de } (k+1) \text{ ori}} \to \mathbb{R}^n$

sau $f : \Delta \subset \mathbb{R} \times \underbrace{\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_{k \text{ ori}} \to \mathbb{R}^n$

sunt funcții cunoscute

Def → O funcție $\varphi : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ este soluție pentru ecuația (2) dc.

$$\varphi^{(k)}(t) = f(t, \varphi(t), \varphi^{(1)}(t), \dots, \varphi^{(k-1)}(t)), \ \forall t \in I$$

Vom considera $\boxed{n = 1}$ adică ecuații scalare

Exemple:

① $k = 1$ ecuații diferențiale scalare de ordin 1

(1) $\Rightarrow F(t, x, x^{(1)}) = 0$

(2) $\Rightarrow \boxed{x^{(1)} = f(t, x)}$

notații: $x' = f(t, x)$ unde $f : \Delta \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

sau $\dfrac{dx}{dt} = f(t, x)$ sau $\dot{x} = f(t, x)$

Dacă $f(t,x)$ nu depinde explicit de x, atunci ecuaţia devine

$$x' = f(t) \quad (3)$$

este ecuaţie de tip primitivă

Dacă $t \in [a,b]$ şi considerăm $t_0 \in [a,b]$, atunci mulţ. sol ec (3) este

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} f(s)\,ds + C, \; C \in \mathbb{R}$$

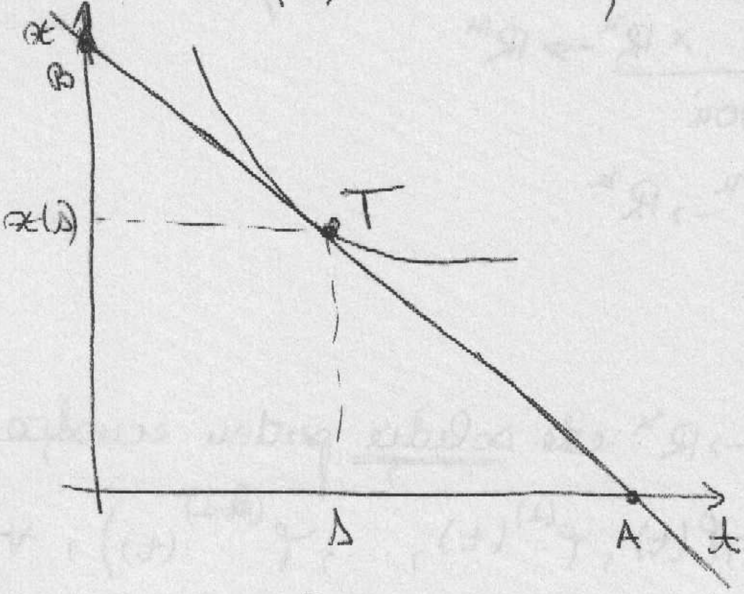
Dacă se cere o soluţie a.î. să avem $x(t_0) = x_0$, atunci $C = x_0$

Altfel spus $x(t) = \int_{t_0}^{t} f(s)\,ds + x_0$ este soluţia problemei (Cauchy iniţiale)

$$\begin{cases} x' = f(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

condiţie iniţială

② Problemă de geometrie: să se determine curbele x (din $\mathbb{R}^2$) a.î. în fiecare punct $(s, x(s))$ să aibă tangentă şi punctul de tangentă să fie simetric faţă de intersecţiile tangentei cu axele de coordonate



(AB) = dr. tangentă în $T(s, x(s))$

$A(t_A, 0)$

$B(0, x_B)$

$TA = TB$

ec. tangentei: $x - x(s) = x'(s)(t-s)$

A: $0 - x(s) = x'(s)(t_A - s)$

$$t_A = s - \frac{x(s)}{x'(s)} \quad (\text{cu condiţia ca } x'(s) \neq 0)$$

$\hookrightarrow = 0 \Rightarrow$ dr e $\parallel$ şi nu $\cap$ dr. a

$B: \ x_B - x(s) = x'(s)(0-s)$

$$\boxed{x_B = x(s) - s\,x'(s)}$$

Din condiția $TA = TB \Rightarrow TA^2 = TB^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow (s - t_A)^2 + (x(s)-0)^2 = (s-0)^2 + (x(s) - x_B)$$

$$\Rightarrow \cancel{s^2} - 2s\left(s - \frac{x(s)}{x'(s)}\right) + \left(s - \frac{x(s)}{x'(s)}\right)^2 + \cancel{x^2(s)} =$$

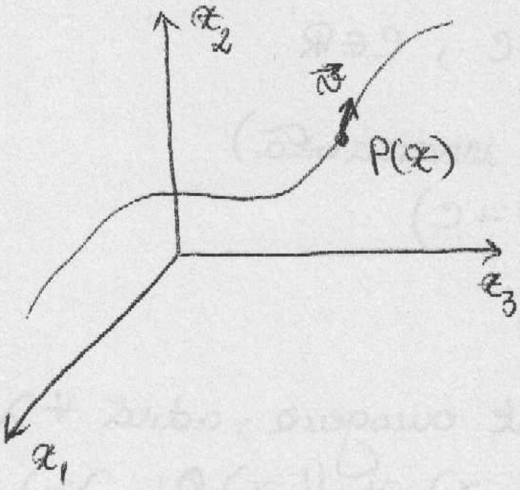
$$= \cancel{s^2} + \cancel{x^2(s)} + 2x(s)\left(x(s) - s x'(s)\right) + \left(x(s) - s x'(s)\right)^2$$

$$\Rightarrow -2s^2 + 2s\frac{x(s)}{x'(s)} + s^2 - 2s\frac{x^2(s)}{(x'(s))^2} + \frac{x^2(s)}{(x'(s))^2} = 2x^2(s) + 2x(s)x'(s) + x^2(s) - 2sx(s)x'(s) + s^2(x'(s))^2$$

$$\Rightarrow x^2(s) - 2(s-s)x(s)x'(s) + s^2(x'(s))^2 + s^2 + 2s\frac{x(s)}{x'(s)}\left(s - \frac{x(s)}{x'(s)}\right) + \frac{x^2(s)}{(x'(s))^2} = 0$$

$$F(s, x(s), x'(s)) = 0.$$

3) <u>Exemplu din mecanică</u>: $x = (x_1, x_2, x_3)$



$$\vec v \overset{not}{=} v = (v_1, v_2, v_3) = \frac{dx}{dt} \overset{not}{=} \dot x$$

$$\vec a \overset{not}{=} a = (a_1, a_2, a_3) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot x$$

Dacă $\vec f \overset{not}{=} f = (f_1, f_2, f_3)$ este forța care acționează asupra lui P, atunci din legea a doua a lui Newton: $m \cdot \ddot x = f(t, x, \dot x)$

↑ masa punctului material

Deci se obține ec:

$$\ddot{x} = \frac{1}{m} f(t, x, \dot{x})$$

Ecuații integrabile prin cuadraturi $n=1$, $k=1$

(ec. de ordin 1, scalare) $\boxed{\frac{dx}{dt} = f(t,x)}$

① Ec. cu variabile separabile:

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = a(t)b(x)} \quad (4)$$

Alg: I. $b(x) = 0$

- $x \in \emptyset \Rightarrow$ ec nu are soluții staționare
- $x \in M = \{x_1, \dots, x_k\} \Rightarrow$ avem sol. staționare $\varphi_j(t) = x_j$, $j = \overline{1,k}$

II. $b(x) \neq 0$

se separă variabilele: $\frac{dx}{b(x)} = a(t)\,dt$

- se determină B primitivă pt $\frac{1}{b}$ și A primitivă pt a
- sol sub formă implicită:

$$B(x) = A(t) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

- sol. explicită (dacă B este inversabilă)

$$x = B^{-1}(A(t) + C)$$

② Ecuația omogenă: $\frac{dx}{dt} = f(t,x)$

unde f este funcție omogenă, adică $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ avem

$$f(\lambda t, \lambda x) = f(t,x) \quad \forall (t,x), (\lambda t, \lambda x) \in \Delta$$

$$(f: \Delta \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R})$$

Obs: Dacă f este funcție omogenă, atunci $\exists\, g: \Delta_1 \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a.î.

$f(t,x) = g\left(\frac{x}{t}\right) \Rightarrow$ forma ec omogene este

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = g\left(\frac{x}{t}\right)} \quad (5)$$

Alg. de rezolvare:

I) Se face schimbarea de variabilă (de funcție)

$$y = \frac{x}{t} \text{, adică } y(t) = \frac{x(t)}{t} \Leftrightarrow x = ty$$

În ec (5) $\Rightarrow \frac{d}{dt}(ty) = g(y) \rightarrow y + t\frac{dy}{dt} = g(y) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dt} = \underbrace{\frac{1}{t}}_{a(t)}\underbrace{(g(y) - y)}_{b(y)}} \quad (6)$$

II Se rez. ec. cu variabile separabile (6).

③ Ec. liniară: $\frac{dx}{dt} = a(t)x + b(t)$

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = a(t)x + b(t)} \quad (7)$$

unde $a, b : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue

3 I Cazul omogen: $b(t) = 0$

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = a(t)x} \quad (8)$$

ca ec. cu variabile separabile avem:

- $x = 0$ sol. staționară
- dacă $x \neq 0$ separăm variabilele:

$$\frac{dx}{x} = a(t)\,dt \Rightarrow \ln|x| = \int_{x_0}^{t} a(s)\,ds + C \quad \text{unde } t_0 \in I,\ C \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow |x| = e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds} \cdot \underbrace{e^{C}}_{C_1 > 0} \Rightarrow x = e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds} \cdot C_2 \text{, } C_2 \in \mathbb{R}^*$$

Deci mulț. sol. ec. (8) este:

$$\{0, Ce^{\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds}, C \in \mathbb{R}^*\} = \{Ce^{\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds}, C \in \mathbb{R}\}$$

În concluzie, ec(8) are soluția generală:

$\boxed{x(t) = C e^{A(t)}}$, $C \in \mathbb{R}$

$\boxed{A \text{ este o primitivă pt } a}$

(2) Cazul neomogen : $b(t) \neq 0$

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x + b(t)$$

Metoda I:

- se rezolvă ec. liniară omogenă atașată:

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = a(t)\bar{x} \xlongequal{\text{ec de forma (8)}}$$

$$\Rightarrow \bar{x}(t) = C e^{A(t)}, \quad A \text{ este o primitivă pt } a$$

- se aplică metoda variației constantelor adică, determinăm $C(t)$ a.î.

$$x(t) = C(t)\, e^{A(t)} \text{ să verifice ec (7)}$$

$$\frac{d}{dt}\left(C(t)\, e^{A(t)}\right) = a(t)\, C(t)\, e^{A(t)} + b(t)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} C(t) \cdot e^{A(t)} + C(t) \cdot \boxed{\frac{d}{dt}\left(e^{A(t)}\right)} = a(t)\, C(t) e^{A(t)} + C(t)$$

$$\Rightarrow \frac{dC}{dt} \cdot e^{A(t)} + \cancel{C(t)\, e^{A(t)} \underbrace{A'(t)}_{= a(t)}} = \cancel{a(t)\, C(t)\, e^{A(t)}} + b(t)$$

$$\Rightarrow \frac{dC}{dt} e^{A(t)} = b(t) \Rightarrow \frac{dC}{dt} = b(t) \cdot e^{-A(t)}$$

$\Rightarrow$ ec. de tip primitivă pentru determinarea lui C $\Rightarrow$

$$\Rightarrow C(t) = \int b(t)\, e^{-A(t)}\, dt + C_1$$

- În concluzie, soluția ec. (7) (mulțimea generală de soluții) este:

$$\boxed{x(t) = \left(\int b(t)\, e^{-A(t)}\, dt + C_1\right) \cdot e^{A(t)}}$$

Metoda 2: dacă se știe că $\varphi_0 : I_0 \to \mathbb{R}$ este soluție a ec. (7), adică

$$\varphi_0'(t) = a(t)\varphi_0(t) + b(t)$$

atunci se face schimbarea de variabilă

$$x(t) = y(t) + \varphi_0(t)$$

Înlocuind în (7) se obține:

$$\frac{d}{dt}\left(y(t) + \varphi_0(t)\right) = a(t)\cdot\left(y(t) + \varphi_0(t)\right) + b(t)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dt} + \cancel{\frac{d\varphi_0}{dt}} = a(t)\,y(t) + \cancel{a(t)\,\varphi_0(t) + b(t)}$$

$\Rightarrow$ ec. liniară omogenă pt y: $\underline{\frac{dy}{dt} = a(t)y}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow y = Ce^{A(t)}$, $C \in \mathbb{R}$

A primitivă pt a

Se obține pt ec. (7) soluția generală:

$$\boxed{x(t) = Ce^{A(t)} + \varphi_0(t)}$$

⑥ Ec. Bernoulli

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = a(t)x + b(t)x^{\alpha}} \quad (9)$$

unde $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$

Obs! $\alpha = 0 \Rightarrow$ ec. liniară neomogenă

$\alpha = 1 \Rightarrow$ ec. liniară omogenă

Metoda 1:

- se rezolvă ec. liniară omogenă atașată:

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = a(t)\bar{x} \Rightarrow \bar{x}(t) = Ce^{A(t)}, \text{ A primitivă pt } a$$

- aplicăm variația constantelor: adică determinăm $C(t)$ a.î. $x(t) = C(t)e^{A(t)}$ să verifice ec. (9):

$$\frac{d}{dt}\left(C(t)e^{A(t)}\right) = a(t)\,C(t)\,e^{A(t)} + b(t)\cdot\left(C(t)e^{A(t)}\right)^{\alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dc}{dt} e^{A(t)} + \cancel{c(t)\cdot e^{A(t)} \underbrace{A'(t)}_{a(t)}} = \cancel{a(t)\, c(t)\, e^{A(t)}} + b(t)\, c^{\alpha} e^{\alpha A}$$

$$\Rightarrow \frac{dc}{dt} = \underbrace{c^{\alpha}}_{b_1(c)} \underbrace{e^{(\alpha-1)A(t)} \cdot b(t)}_{a_1(t)}$$

ec. cu variabile separabile pt determinarea lui c

Obs! • dacă $\alpha > 0$, atunci se obține soluția staționară $c = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ ec (9) are sol $x(t) = 0$

• dacă $\alpha < 0$ at ec. în c nu are soluții staționare

Eddp - Curs 2

12.10.2011

- Cursul din 19.10.2011, $8^{00}-10^{00}$ se va recupera Luni, 17.10.2011, $14^{00}-16^{00}$ sala 220

Seminarul din 19.10.2011, $10^{00}-12^{00}$ se va recupera Luni, 17.10.2011, $12^{00}-14^{00}$ sala ? 13

Seminarul din 20.10.2011, [redacted], la grupa 343 se va recupera Luni, 17.10.2011, $12^{00}-14^{00}$ sala 9

---

4) Ecuații integrabile prin cuadraturi

Ec. Bernoulli $\boxed{\dfrac{dx}{dt} = a(t)x + b(t)x^{\alpha}}$ (1)

$\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$

Metoda 2: Se face schimbarea de variabilă $\boxed{y = x^{1-\alpha}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \boxed{x = y^{\frac{1}{1-\alpha}}}$

$\left(x(t) = (y(t))^{\frac{1}{1-\alpha}}\right)$

Înlocuind în ec (1) se obține:

$$\frac{d}{dt}\left(y^{\frac{1}{1-\alpha}}\right) = a(t)\cdot y^{\frac{1}{1-\alpha}} + b(t)\cdot\left(y^{\frac{1}{1-\alpha}}\right)^{\alpha}$$

$$\frac{1}{1-\alpha}\, y^{\frac{1}{1-\alpha}-1} \cdot \frac{dy}{dt} = a(t)\cdot y^{\frac{1}{1-\alpha}} + b(t)\cdot y^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-\alpha}\, y^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\, \frac{dy}{dt} = a(t)\, y^{\frac{1}{1-\alpha}} + b(t)\, y^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

Obs! 1) pt $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$ $\Rightarrow$ ec. obț. are sol staționară $y = 0 \Rightarrow$ sol $x = 0$ a ec (1)

2) pt $\alpha < 0 \Rightarrow$ ec nu are soluția $y = 0$

Înmulțind cu $\dfrac{-\alpha}{1-\alpha}$ $\Rightarrow$

$$\frac{1}{1-\alpha}\,\frac{dy}{dt} = a(t)\, y^{\frac{1}{1-\alpha} - \frac{\alpha}{1-\alpha}} + b(t) \quad \Big/ \cdot (1-\alpha)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = (1-\alpha)\, a(t)\, y + b(t) \Rightarrow \text{ec. liniară pt } y$$

2) Ec. Riccati

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = a(t)x^2 + b(t)x + c(t)} \quad (2)$$

unde $a, b, c : I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$, funcții continue

OBS! 1) Dacă $c \equiv 0$ ($c(t) = 0 \ \forall t \in \mathbb{R}$), atunci ecuația (2) este ecuație Bernoulli cu $\alpha = 2$

2) Dacă $a \equiv 0$ ($a(t) = 0 \ \forall t \in I$), atunci ec. (2) este liniară

Rezolvarea ec (2) presupune cunoașterea unei soluții particulare φ_0

Prop. Dacă φ_0 este o soluție particulară a ec (2), atunci prin schimbarea de variabilă $\boxed{y = x - \varphi_0}$ adică $y(t) = x(t) - \varphi_0(t)$, se ajunge la o ecuație Bernoulli cu $\alpha = 2$

Dem: $x(t) = y(t) + \varphi_0(t)$

$x = y + \varphi_0$

Ec (2) devine: $\frac{d}{dt}(y + \varphi_0) = a(t)(y + \varphi_0)^2 + b(t)(y + \varphi_0) + c(t) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dt} + \frac{d\varphi_0(t)}{dt} = a(t)y^2 + 2a(t)\,y\,\varphi_0(t) + a(t)\cdot\varphi_0^2(t) + b(t)y + b(t)\varphi_0(t) + c(t)$$

Dar φ_0 e soluție a ec (2) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{d\varphi_0(t)}{dt} = a(t)\varphi_0^2(t) + b(t)\varphi_0(t) + c(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = \underbrace{a(t)}_{b_1(t)}y^2 + \underbrace{[2a(t)\varphi_0(t) + b(t)]}_{b_1(t)}y \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ ec. Bernoulli cu $\alpha = 2$.

Propoziția 2: Fie ecuația:

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = g\left(\frac{at + bx + c}{\alpha t + \beta x + \gamma}\right)} \quad (3)$$

unde $g : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcție continuă, $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ a.î. a și α nu sunt 0 simultan ($|a| + |\alpha| > 0$),

β și ~~a~~ b nu sunt zero simultan
$(|b|+|\beta|>0)$

Considerăm $\Delta = a\beta - b\alpha$

a) Dacă $\Delta = 0$, atunci schimbarea de variabilă $y = at + bx$ dacă $b \neq 0$ <u>sau</u> $y = \alpha t + \beta x$ dacă $\beta \neq 0$, conduce la ec. cu variabile separabile

b) Dacă $\Delta \neq 0$, atunci schimbarea de variabilă

$$\begin{cases} s = t - t_0 \\ y = x - x_0 \end{cases} \Leftrightarrow (t = s + t_0) \quad \left(\begin{array}{l} y(s) = x(t(s)) - x_0 \text{ sau} \\ x(t) = y(s(t)) + x_0 \end{array} \right)$$

unde (t_0, x_0) este soluția sistemului algebric liniar:

$$\begin{cases} at + bx + c = 0 \\ \alpha t + \beta t + \gamma = 0 \end{cases}$$, conduce la o ec. omogenă (în y și s

<u>Dem.</u>

a) $\underline{\Delta = 0}$. Presupunem că $b \neq 0 \Rightarrow$ schimbarea de variabilă este

$$y = at + bx$$
$$y(t) = at + bx(t) \Leftrightarrow x(t) = \frac{1}{b}(y(t) - at)$$

Ec (3) devine:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{b}(y(t) - at)\right) = g\left(\frac{at + b \cdot \frac{1}{b}(y - at) + c}{\alpha t + \beta \frac{1}{b}(y - at) + \gamma}\right)$$

Dar $\Delta = 0 \Rightarrow a\beta - b\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{a\beta}{b} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{b}\frac{dy}{dt} - \frac{a}{b} = g\left(\frac{\cancel{at} + y - \cancel{at} + c}{\frac{\beta}{b}(\cancel{at} + y - \cancel{at}) + \gamma}\right) \Big| \cdot b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dt} - a = b \cdot g\left(\frac{y + c}{\frac{\beta}{b}y + \gamma}\right) \Big| + a \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \underbrace{b \cdot g\left(\frac{y + c}{\frac{\beta}{b}y + \gamma}\right) + a}_{a_1(y)} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ ec. cu variabile separabile în y și t cu $a_1(y) = b g\left(\frac{y + c}{\frac{\beta}{b}y + \gamma}\right) + a$

și $b_1(t) = 1$

$$\frac{dy}{dt} = a_1(y)\, b_1(t)$$

b) $\Delta \neq 0 \Rightarrow$ sistemul algebric

$$\begin{cases} at + bx = -c \\ \alpha t + \beta x = -\gamma \end{cases}$$ are soluţie unică (t_0, x_0)

Schimbarea de variabilă în ec (3) înseamnă

$$x(t) = y(s(t)) + x_0$$

deci se obţine

$$\frac{d}{dt}\left(y(s(t)) + x_0\right) = g\left(\frac{a(s+t_0) + b(y+x_0) + c}{\alpha(s+t_0) + \beta(y+x_0) + \gamma}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dt}(s(t)) \cdot \frac{d(s(t))}{dt} = g\left(\frac{as + \cancel{at_0} + by + \cancel{bx_0} + \cancel{c}}{\alpha s + \cancel{\alpha t_0} + \beta y + \cancel{\beta x_0} + \cancel{\gamma}}\right)$$

dar $s = t - t_0 \Rightarrow s(t) = t - t_0 \Rightarrow \dfrac{ds(t)}{dt} = 1$

$$\Rightarrow \frac{dy}{ds} = g\left(\frac{as + by}{\alpha s + \beta y}\right)$$

$$\frac{dy}{ds} = g\underbrace{\left(\frac{\cancel{s}(a + b\frac{y}{s})}{\cancel{s}(\alpha + \beta\frac{y}{s})}\right)}_{h(\frac{y}{s})} \Rightarrow \frac{dy}{ds} = h\left(\frac{y}{s}\right) \Rightarrow \text{ec. omogenă în } y \text{ şi } s$$

<u>Existenţa</u> şi <u>unicitatea soluţiei</u> <u>problemei Cauchy</u> pt ecuaţii <u>diferenţiale scalare</u>

Fie ec. diferenţială scalară de ordinul întâi

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \quad (4) \quad \text{unde } f: \Delta \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

Spunem că avem o <u>problemă Cauchy</u> pt ec (4) dacă se cere determinarea unei soluţii $\varphi: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a.î.

$$\begin{cases} \dfrac{d\varphi(t)}{dt} = f(t, \varphi(t)), \ \forall t \in I \\ \varphi(t_0) = x_0 \end{cases}$$

unde $(t_0, x_0) \in \Delta$.

Deci problema Cauchy se poate nota (f, t_0, x_0) și se înțelege prob:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (5)$$

<u>Teorema Cauchy-Picard</u> (existența și unicitatea soluției prob. Cauchy)

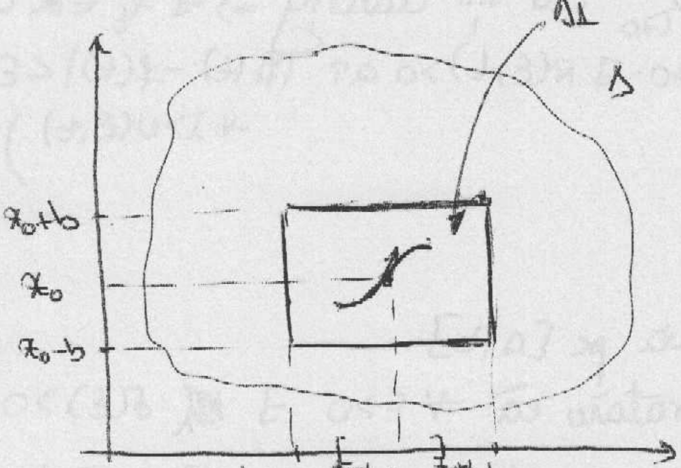
$f(\cdot, \cdot) : \Delta \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

- f continuă în ambele argumente: $\exists M>0$ a.î. $M = \sup |f(t,x)|$, $(t,x)\in\Delta_1$
- $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ este mărginită: $\exists M_1 > 0$ a.î. $M_1 = \sup \left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x)\right|$, $(t,x)\in\Delta_1$
- $(t_0, x_0) \in \Delta$
- $a, b > 0$ a.î. $\overbrace{[t_0 - a, t_0 + a]\times[x_0 - a, x_0 + a]}^{\Delta_1 \text{ not}} \subset \Delta$ (dreptunghi centrat în t_0, x_0)
- Se consideră $\alpha \le \min(a, \frac{b}{M})$

$\Downarrow$

$\exists!\ \varphi : [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \to \mathbb{R}$ soluție a problemei Cauchy (f, t_0, x_0) adică

$$\begin{cases} \dfrac{d\varphi(t)}{dt} = f(t, \varphi(t)) \quad \forall\, t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \\ \varphi(t_0) = x_0 \end{cases}$$



Preliminarii pt demonstrarea teoremei Cauchy-Picard

Fie $(f_i)_{i\geq 0}$ un şir de funcţii continue, $f_i : I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ interval

Definiţii.

1) Şirul $(f_i)_{i\geq 0}$ converge punctual la $f : I \to \mathbb{R}$ dacă $\forall \varepsilon > 0, \forall t \in I, \exists N(\varepsilon, t)$ a.î. $|f_i(t) - f(t)| < \varepsilon, \forall i \geq N(\varepsilon, t)$ se notează $f_i \xrightarrow[i\to\infty]{} f$

2) Şirul $(f_i)_{i\geq 0}$ converge uniform la $f : I \to \mathbb{R}$ dacă $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N(\varepsilon) > 0$ a.î.

$$|f_i(t) - f(t)| < \varepsilon \quad \forall i \geq N(\varepsilon) \quad \forall t \in I.$$

3) Şirul $(f_i)_{i\geq 0}$ este şir Cauchy dacă $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N(\varepsilon) > 0$ a.î.

$$|f_i(t) - f_j(t)| \quad \forall i, j \geq N(\varepsilon).$$

Lema 1. Fie şirul de funcţii continue $f_i : I \to \mathbb{R}$, $I = [a,b]$, $(f_i)_{i\geq 0}$ este şir Cauchy.

Atunci:

1) $\exists$ o funcţie continuă $f : I \to \mathbb{R}$ a.î. $f_i \xrightarrow[i\to\infty]{} f$

2) pt funcţia f de la punctul 1) avem $\int_a^b f_i(t)\,dt \xrightarrow[i\to\infty]{} \int_a^b f(t)\,dt$

$$\left(\lim_{i\to\infty} \int_a^b f_i(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt \right)$$

Dem. 1) Fie $t \in [a,b] \Rightarrow (f_i(t))_{i\geq 0}$ ~~este~~ şir Cauchy $\Rightarrow \exists\, l_t \in \mathbb{R}$ a.î.

$\lim_{i\to\infty} f_i(t) = l_t$ $\quad (\forall \varepsilon > 0, \forall t > 0 \; \exists N(\varepsilon, t) > 0$ a.î. $|f_i(t) - f(t)| < \varepsilon$ $\forall i > N(\varepsilon, t))$

Definim $f : [a,b] \to \mathbb{R}$

$f(t) = l_s$

Arătăm că f este continuă pe $[a,b]$

~~Fie $t_1, t_2 \in [a,b]$~~. Dacă arătăm că $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; \delta(\varepsilon) > 0$ a.î.

$$|f(t_1) - f(t_2)| < \varepsilon, \forall t_1, t_2 \in [a,b] \text{ a.î. } |t_1 - t_2| < \delta(\varepsilon)$$

Fie $t_1, t_2 \in [a,b]$

$$|f(t_1) - f(t_2)| = |\underbrace{f(t_1) - f_i(t_1)} + f_i(t_1) - f_i(t_2) + \underbrace{f_i(t_2) - f(t_2)}| \leq$$

$$\leq \underbrace{|f(t_1) - f_i(t_1)|}_{\leq \varepsilon/3} + \underbrace{|f_i(t_1) - f_i(t_2)|}_{< \varepsilon/2} + \underbrace{|f_i(t_2) - f(t_2)|}_{< \varepsilon/3}$$

$< \cancel{3} \cdot \frac{\varepsilon}{\cancel{3}} = \varepsilon$

Deci: f este funcție uniform continuă, deci continuă

2) $\left| \int_a^b f_i(t) - \int_a^b f(t)\,dt \right| = \left| \int_a^b (f_i(t) - f(t))\,dt \right| \leq \int_a^b \underbrace{|f_i(t) - f(t)|}_{< \varepsilon} dt \leq$

$\leq \int_a^b \varepsilon\, dt = \varepsilon t \Big|_a^b = \varepsilon (b-a) \qquad \forall \varepsilon > 0$
$\qquad \forall i \geq N(\varepsilon, t)$

$\Rightarrow \int_a^b f_i(t)\,dt \longrightarrow \int_a^b f(t)\,dt$.

17.10.2011

Preliminarii asupra șirurilor de funcții continue

Lema 2: În condițiile teoremei Cauchy-Picard (adică):

f este continuă în ambele argumente și $\frac{\partial f}{\partial x}$ este mărginită:

$\exists M_1 > 0$ a.î. $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\right| \le M_1, \forall (t,x) \in \Delta$)

rezultă că funcția f este Lipschitz în al doilea argument, adică

$\exists L > 0$ a.î. $|f(t,x_1) - f(t,x_2)| \le L|x_1 - x_2|$ $\forall (t,x_1),(t,x_2) \in \Delta$

$\Delta = [t_0-a, t_0+a] \times [x_0-b, x_0+b]$

Dem.

Considerăm funcția $g_t : [x_0-b, x_0+b] \to \mathbb{R}$ pt. $t \in [t_0-a, t_0+a]$, definită prin $g_t(x) = f(t,x)$ $\forall x \in [x_0-b, x_0+b]$. Fie $x_1, x_2 \in [x_0-b, x_0+b]$, x_1

Pt g_t se aplică teorema Lagrange: $\exists\, c \in (x_1, x_2)$ a.î.:

$$g(x_2) - g(x_1) = \underbrace{g_t'(c)}_{\frac{\partial f}{\partial x}(t,c)}(x_2 - x_1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |g(x_2) - g(x_1)| = \left|\frac{\partial f}{\partial x}(t,c)(x_2 - x_1)\right| \le \left|\frac{\partial f}{\partial x}(t,c)\right| \cdot |x_2 - x_1| \le$$

$$\le M_1 (x_2 - x_1) \Rightarrow \exists L > 0 \text{ și } L = M_1$$

qed

Lema 3 (Reprezentarea integrală a soluției problemei Cauchy (f, t_0, x_0))

În ipotezele teoremei Cauchy Picard are loc echivalența:

$\varphi : \underbrace{[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]}_{I_\alpha} \to \mathbb{R}$ este soluție a problemei Cauchy

$$[f, t_0, x_0] \Leftrightarrow \boxed{\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))\, ds} \quad \forall t \in I_\alpha$$

Dem.

„$\Rightarrow$" Pp φ soluție a problemei Cauchy $(f, t_0, x_0) \Rightarrow \begin{cases} \varphi'(t) = f(t, \varphi(t)) \\ \forall t \in I_\alpha \\ \varphi(t_0) = x_0 \end{cases}$

Știm că avem:

$$\varphi(t) = \underbrace{\int_{t_0}^{t} \varphi'(s)\, ds}_{\varphi(s)\big|_{t_0}^{t} = \varphi(t) - \varphi(t_0)} + \varphi(t_0)$$

$$\Rightarrow \varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))\, ds$$

„$\Leftarrow$" Fie $\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))\, ds$. Arătăm că verifică condițiile din problema Cauchy.

$$\varphi(t_0) = x_0 + \underbrace{\int_{t_0}^{t_0} f(s, \varphi(s))\, ds}_{= 0 \text{ (integrala din funcție continuă pe mulțime de măsură nu...)}} = x_0$$

$$\varphi'(t) = \left(x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))\, ds\right)' =$$

$F(s)$ este o primitivă pt $f(s, \varphi(s))$

$$\Downarrow$$

$$F'(s) = f(s, \varphi(s))$$

$$= \left(F(s)\Big|_{t_0}^{t}\right)' = \left(F(t) - F(t_0)\right)' = F'(t) = \underline{\underline{f(t, \varphi(t))}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$$

qed

<u>Demonstrație</u> <u>teo</u>. <u>Cauchy-Picard</u>. Definim șirul de funcții următor

$\varphi_i : I_\alpha = [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \to \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{N}$ a.î.

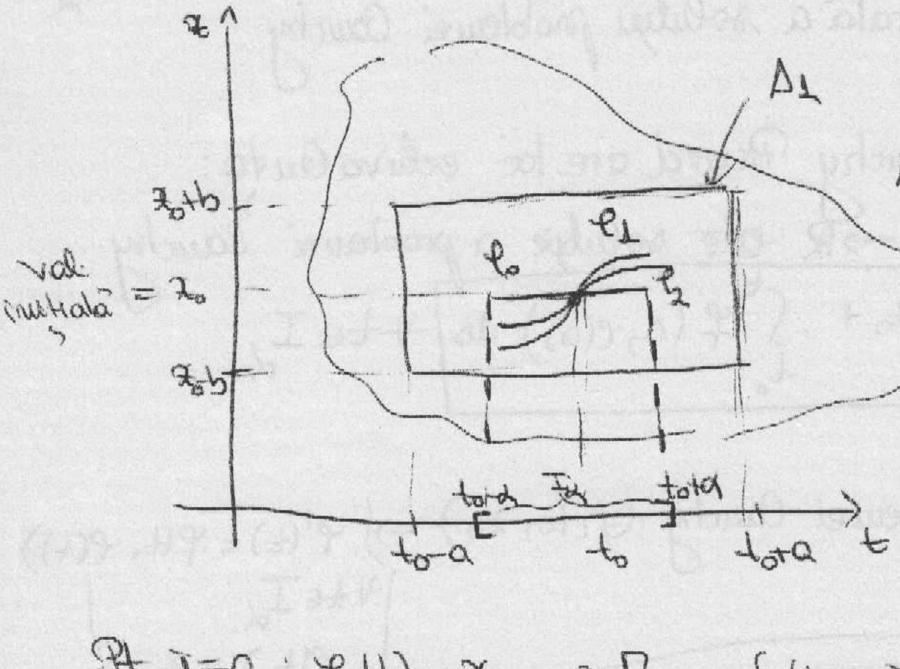
$\varphi_0(t) = x_0$, $\forall\, t \in I_\alpha$

$\varphi_{i+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_i(s))\, ds$ $\forall\, i \in \mathbb{N}$

<u>Et. 1</u>. Arătăm că $\Gamma_{\varphi_i} =$

graficul lui φ

$$= \{(t, \varphi_i(t)) \mid t \in I_\alpha\} \subset D_1$$



$\varphi_0(t) = x_0$, $\forall\, t \in I_\alpha$

$\varphi_1(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_0(s))\, ds$ $\forall\, t \in I_\alpha$

$\varphi_2(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_1(s))\, ds$ $\forall\, t \in I_\alpha$

Pt $\underline{i = 0}$: $\varphi_0(t) = x_0 \Rightarrow \Gamma_{\varphi_0} = \{(t, x_0) \mid t \in I_\alpha\} \subset D_1$

Presupunem proprietatea adevărată până la i, adică

$$\Gamma_{\varphi_k} \subset \Delta_1, \ \forall\, 0 \le k \le i$$

~~Vă~~ demonstrăm că este adevărată pt $i+1$

$$|\varphi_{i+1}(t) - x_0| = \left|\cancel{x_0} + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_i(s))\,ds - \cancel{x_0}\right| = \left|\int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_i(s))\,ds\right| \le$$

$$\le \int_{t_0}^{t} \underbrace{|f(s, \varphi(s))|}_{\le M \text{ (din } f \text{ continuă în ambele argumente)}}\,ds \le \int_{t_0}^{t} M\,ds = Ms\Big|_{t_0}^{t} = M\,|t - t_0| \le M\alpha \le$$

$$\alpha \le \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$$

dar $t \in I_\alpha \Rightarrow |t - t_0| \le \alpha$

$$I_\alpha = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$$

$$\le \cancel{M}\,\frac{b}{\cancel{M}} \Rightarrow |\varphi_{i+1}(t) - x_0| \le b \Rightarrow \varphi_{i+1}(t) \in [x_0 - b, x_0 + b] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Gamma_{\varphi_{i+1}} \subset \Delta_1$$

Et 2. Dem că șirul de funcții $(\varphi_i)_{i \ge 0}$ este șir Cauchy.

- se dem că: (prin inducție)

$$(1) \quad |\varphi_{i+1}(t) - \varphi_i(t)| \le \frac{ML^i (t - t_0)^{i+1}}{(i+1)!} \qquad \forall i \ge 0, \ \forall t \in [t_0, t_0 + \alpha]$$

Pt $\underline{\underline{i=0}}$. $|\varphi_1(t) - \varphi_0(t)| \le \dfrac{ML^0 (t - t_0)}{1!}$;

Avem: $|\varphi_1(t) - \varphi_0(t)| = \left|\cancel{x_0} + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_0(s))\,ds - \cancel{x_0}\right| =$

$$= \left|\int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_0(s))\,ds\right| \le \int_{t_0}^{t} \underbrace{|f(s, \varphi_0(s))|}_{\le M}\,ds \le M\int_{t_0}^{t} ds =$$

$$= M(t - t_0) =$$

$$= ML^0 (t - t_0)$$

Presupunem propr. adev. până la i: $|\varphi_{j+1}(t) - \varphi_j(t)| \le \dfrac{ML^j (t-t_0)^{j+1}}{(j+1)!}$ $\quad \forall\, 0 \le j \le i$, $\forall\, t \in [t_0, t_0+$

Să demonstrăm pt $i+1$

$$|\varphi_{i+2}(t) - \varphi_{i+1}(t)| = \left|\cancel{x_0} + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_{i+1}(s))\,ds - \cancel{x_0} - \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_i(s))\,ds\right| =$$

$$= \left|\int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_{i+1}(s)) - f(s, \varphi_i(s))\,ds\right| \le \int_{t_0}^{t} \underbrace{|f(s, \underbrace{\varphi_{i+1}(s)}_{x_2}) - f(s, \underbrace{\varphi_i(s)}_{x_1})|\,ds}_{(\text{lemei } 2)}$$

$$\le \int_{t_0}^{t} L\, |\underbrace{\varphi_{i+1}(s) - \varphi_i(s)}_{\le \frac{ML^i (t-t_0)^{i+1}}{(i+1)!}}|$$

$$\le L \int_{t_0}^{t} \frac{ML^i (t-t_0)^{i+1}}{(i+1)!}\,dt = L\,\frac{ML^i}{(i+1)!} \int_{t_0}^{t} (t-t_0)^{i+1}\,dt =$$

$$= \frac{ML^{i+1}}{(i+1)!} \cdot \frac{(t-t_0)^{i+2}}{i+2} = \frac{ML^{i+1}(t-t_0)^{i+2}}{(i+2)!}$$

Deci: relația (1) este adevărată

Evaluăm $|\varphi_{i+p}(t) - \varphi_i(t)| \overset{p>0}{=} |\underbrace{\varphi_{i+p}(t) - \varphi_{i+p-1}(t)} + \underbrace{\varphi_{i+p-1}(t) - \varphi_{i+p-2}(t)} + \ldots +$

$$+ \varphi_{i+1}(t) - \varphi_i(t)| \le \sum_{k=1}^{p} |\underbrace{\varphi_{i+k}(t) - \varphi_{i+k-1}(t)}_{\overset{(1)}{\le} \frac{ML^{i+k-1}(t-t_0)^{i+k}}{(i+k)!}}|$$

$$\le M \sum_{k=1}^{p} \frac{L^{i+k-1}(t-t_0)^{i+k}}{(i+k)!}$$

$$\le \sum_{k=0}^{p-1} |\varphi_{i+p-k}(t) - \varphi_{i+p-k-1}(t)| \le \sum_{k=0}^{p-1} \frac{ML^{i+p-k-1}(t-t_0)^{i+p-k}}{(i+p-k)!}$$

Folosim inegalitatea $(i+p-k)! \ge (i+1)!\,(p-k-1)!$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{(i+p-k)!} \le \frac{1}{(i+1)!\,(p-k-1)!} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{|\varphi_{i+p}(t) - \varphi_i(t)|} \le M \sum_{k=0}^{p-1} \frac{L^{i+p-k-1}(t-t_0)^{i+p-k}}{(i+1)!\,(p-k+1)!} =$$

$$= M \underbrace{\frac{L^i (t-t_0)^i}{(i+1)!}}_{\xrightarrow{i\to\infty} 0} \underbrace{\sum_{k=0}^{p-1} \frac{L^{p-k-1}(t-t_0)^{p-k}}{(p-k-1)!}}_{\text{sumă finită}} \longrightarrow 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow (\varphi_i)_{i\geq 0}$ este șir Cauchy $\xrightarrow{\text{Lema 1}} \exists\, \varphi : [t_0-\alpha, t_0+\alpha] \to \mathbb{R}$ a.î.

$\varphi(t) = \lim\limits_{i\to\infty} \varphi_i(t)$

Et 3. Arătăm că $\varphi(t) = \lim\limits_{i\to\infty} \varphi_i(t)$ este soluție a problemei Cauchy (f, t_0, x_0)

$\varphi(t_0) = \lim\limits_{i\to\infty} \underbrace{\varphi_i(t_0)}_{} = \lim\limits_{i\to\infty} x_0 = x_0 \Rightarrow$ cond. inițială este îndeplinită (2)

$$\varphi_i(t_0) = x_0 + \int_{t_0}^{t_0} f(s, \varphi_{i-1}(s))\,ds = x_0$$

Avem $\varphi_i'(t) = \left(x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_{i-1}(s))\,ds\right)' =$

$$= f(t, \varphi_{i-1}(t))\cdot \underbrace{t'}_{1} - \underbrace{f(t_0, \varphi_{i-1}(t_0))\cdot t_0'}_{0} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \varphi_i'(t) = f(t, \varphi_{i-1}(t)),\ \forall i \geq 1$

Rezultă $\varphi'(t) = \left(\lim\limits_{i\to\infty} \varphi_i(t)\right)' = \lim\limits_{i\to\infty} \varphi_i'(t) = \lim\limits_{i\to\infty}$

$= f(t, \varphi(t))$ (↑ f continuă) $\Rightarrow \varphi'(t) = f(t, \varphi(t))\ \forall t \in I_\alpha$
$\Rightarrow \varphi$ verifică ecuația (3)

Existența soluției este demonstrată prin (2) și (3)

Exemplu. Fie pb Cauchy $\begin{cases} x' = x \\ x(0) = 1 \end{cases}$ (4)

$x' = x \Rightarrow x = C e^{\int 1\,dt} = C e^{t}$
Cum $x(0) = 1$ $\Big/ \Rightarrow 1 = C\cdot e^0 \Rightarrow C = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ sol. pb. Cauchy este $\boxed{x(t) = e^t}$

Construim șirul aproximațiilor succesive pt calcul soluției prob (4)
(șirul din metoda de aproximare Picard)

$$\boxed{\varphi_0(t) = x_0 = 1}$$

$$\varphi_1(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_0(s))\,ds = 1 + \int_0^t \varphi_0(s)\,ds =$$

$f(t,x) = x$

$t_0 = 0$

$x_0 = 1$

$$= 1 + \int_0^t 1\,ds = 1 + t. \Rightarrow \varphi_1(t) = 1 + t$$

$$\varphi_2(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_1(s))\,ds = 1 + \int_0^t \varphi_1(s)\,ds = 1 + \int_0^t (1+s)\,ds =$$

$$= 1 + \left(s + \frac{s^2}{2}\right)\Big|_0^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} \Rightarrow \boxed{\varphi_2(t) = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!}}$$

Tema: Arătați că $\varphi_n(t) = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \dots + \frac{t^n}{n!}$

Se știe: seria exponențială este:

$$\sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!} = e^t$$

2) Fie problema Cauchy (f, t_0, x_0) unde $f: \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(t,x) = 3\sqrt[3]{x^2}.$$

a) Arătați că pt $x_0 \neq 0$ problema Cauchy (f, t_0, x_0) verifică cond. t.e. C-P.

b) Arătați că pb. Cauchy $(f, 0, 0)$ adică $\begin{cases} x' = 3\sqrt[3]{x^2} \\ x(0) = 0 \end{cases}$

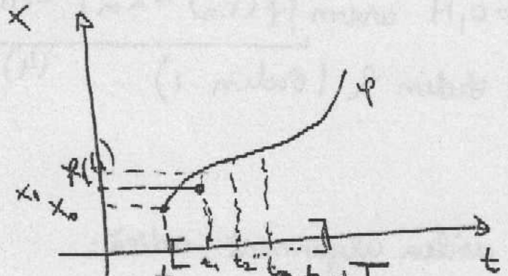
nu verifică cond. C-P

Ecuații diferențiale
CURS 4

26.10.2011

Metoda Euler pentru aproximarea soluției unei probleme Cauchy pentru ecuații diferențiale

Fie problema Cauchy: $\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ (1)



$\varphi(\cdot) : [t_0, t_0+T] \to \mathbb{R}$ soluție pt (1)

Problemă: pt $t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_N \leq t_0 + T$ să determinăm niște $x_1, x_2, \ldots, x_m$ care să aproximeze $\varphi(t_1), \varphi(t_2), \ldots, \varphi(t_N)$

Considerăm diviziune echidistantă cu $N+1$ puncte cu pasul $h = \frac{t_0+T-t_0}{N} = \frac{T}{N}$; $t_m = t_{m-1}+h$

Pentru $= t_0 + m\cdot h$

Pentru intervalul $[t_m, t_{m+1}]$ avem:

$$\int_{t_m}^{t_{m+1}} f(t, x(t))\,dt \overset{(1)}{=} \int_{t_m}^{t_{m+1}} x'(t)\,dt = x(t)\Big|_{t_m}^{t_{m+1}} = x(t_{m+1}) - x(t_m) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{x(t_{m+1}) = x(t_m) + \int_{t_m}^{t_{m+1}} f(t, x(t))\,dt} \quad (2) \Rightarrow x(t_{m+1}) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t_{m+1}} f(t, x(t))$$

Se consideră expresia aproximativă:

$$x_{m+1} \simeq x(t_{m+1})$$

$$x_{m+1} = x_m + h\cdot f(t_m, x_m)$$

$$\boxed{\int_{t_m}^{t_{m+1}} f(t, x(t))\,dt \overset{\text{th de medie}}{=} f(t^*, x(t^*)) \cdot \underbrace{(t_{m+1} - t_m)}_{h} \simeq f(t_m, x_m)\cdot h}$$

Prin urmare, schema numerică Euler explicită este:

$$(3)\begin{cases} x_0 \\ x_{m+1} = x_m + h\cdot f(t_m, x_m);\ 0 \leq m \leq N-1 \end{cases}$$

Teorema de aproximare prin metoda Euler

$f : D \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuă

$\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial x}$ sunt deci continue

$D_1 = [t_0 - a, t_0 + a] \times [x_0 - b, x_0 + b] \subset D$

$M = \sup_{(t,x)\in D_1} |f(t,x)|$

} (sunt îndeplinite condițiile t. Cauchy - Picard)

~~schema de aproximare (3) de mai sus~~

Fie $\varphi : [t_0 - T, t_0 + T] \to \mathbb{R}$ soluția unică a cărei existență și unicitate este asigurată de th Cauchy - Picard

Se consideră aproximarea $(x_m)_{0 \le m \le N}$ dată de (3).

Atunci $\exists$ o constantă $A > 0$ astfel încât pt oricare $m = \overline{0,N}$ avem $|\varphi(t_m) - x_m| < A h$ (4)

unde $t_m = t_0 + m \cdot h$, $h = \frac{T}{N}$, adică metoda Euler este de ordin h (ordin 1)

În particular avem $|\varphi(t_0 + T) - x_N| < A \cdot h$ (5)

OBS:

1) $\frac{\partial f}{\partial x}$ continuă pe $D_1 \Rightarrow f$ este funcție Lipschitz în al doilea argument, adică:

$\exists L_2 > 0$ a.î. $|f(t, x_1) - f(t, x_2)| < L_2 |x_1 - x_2|, \forall (t, x_1), (t, x_2) \in D_1$ (6)

2) $\frac{\partial f}{\partial t}$ continuă pe $D_1 \Rightarrow f$ este funcție Lipschitz în primul argument, adică:

$\exists L_1 > 0$ a.î. $|f(t_1, x) - f(t_2, x)| < L_1 |t_1 - t_2|, \forall (t_1, x), (t_2, x) \in D$ (7)

Lema 1: Fie $x_0, x_1, .., x_N$ date de (3)

În condițiile teoremei de aproximare avem:

$|x_m - x_0| \le M \cdot m \cdot h$, $\forall m = \overline{0, N}$ (8)

DEM: • Pt $m = 0$: $|x_0 - x_0| = 0 \le M \cdot 0 \cdot h = 0$

Pt $m = 1$: $|x_1 - x_0| = |x_0 + h \cdot f(t_0, x_0) - x_0| = h \cdot \underbrace{|f(t_0, x_0)|}_{\le M} \le$

$\boxed{\text{din (3)} \Rightarrow x_1 = x_0 + h \cdot f(t_0, x_0)}$

$M \cdot h = M \cdot 1 \cdot h$

Presupunem proprietatea A pentru m: $|x_m - x_0| \le M \cdot m \cdot h$ și demonstrăm pentru $m+1$, adică: $|x_{m+1} - x_0| \le M \cdot (m+1) \cdot h$

Avem:

$|x_{m+1} - x_0| = |(x_{m+1} - x_m) + (x_m - x_0)| \le \underbrace{|x_{m+1} - x_m|}_{= |\cancel{x_m} + h f(t_m, x_m) - \cancel{x_m}|} + \underbrace{|x_m - x_0|}_{\le M \cdot m \cdot h} \le$

~~$|x_m + h$~~

$\le h |f(t_m, x_m)| + M \cdot m \cdot h \le h \cdot M + M \cdot m \cdot h = M \cdot (m+1) \cdot h$

EDDP
CURS 4
26.10.2011

Lema 2: În condițiile th de aproximare $\exists B > 0$ a.î.:

$$\left| \int_{t_m}^{t_{m+1}} f(t, \varphi(t))dt - h f(t_m, \varphi(t_m)) \right| < B \cdot h^2, \forall m = \overline{0, N-1}$$

Mai mult $B = L_1 + L_2 \cdot M$

DEM:

Din th de medie (deoarece f este continuă): $\exists t^* \in [t_m, t_{m+1}]$ a.î. $\int_{t_m}^{t_{m+1}} f(t, \varphi(t))dt =$

$$= f(t^*, \varphi(t^*)) \cdot \underbrace{(t_{m+1} - t_m)}_{h} = h \cdot f(t^*, \varphi(t^*)).$$

Deci

$$\stackrel{not}{=} \left| \int_{t_m}^{t_{m+1}} f(t, \varphi(t))dt - h \cdot f(t_m, \varphi(t_m)) \right| = \left| h \cdot f(t^*, \varphi(t^*)) - h \cdot f(t_m, \varphi(t_m)) \right| =$$

$$= h \cdot \left| f(t^*, \varphi(t^*)) - f(t_m, \varphi(t^*)) + f(t_m, \varphi(t^*)) - f(t_m, \varphi(t_m)) \right| \leq$$

$$\leq h \cdot \Big[\underbrace{\left| f(t^*, \varphi(t^*)) - f(t_m, \varphi(t^*)) \right|}_{\stackrel{(7)}{\leq}} + \underbrace{\left| f(t_m, \varphi(t^*)) - \varphi(t_m, \varphi(t_m)) \right|}_{\stackrel{(6)}{\leq}} \Big] \leq$$

$$\leq h \left(L_1 \underbrace{|t^* - t_m|}_{\leq h} + L_2 |\varphi(t^*) - \varphi(t_m)| \right) \Rightarrow$$

Aplicăm th Lagrange funcției φ pe $[t_m, t^*]$:

$$\exists c \in (t_m, t^*) \text{ a.î. } \varphi(t_m) - \varphi(t^*) = \varphi'(c)(t_m - t^*)$$

$$|E| \leq h \left(L_1 h + L_2 |\varphi'(c)| \underbrace{|t_m - t^*|}_{\leq h} \right) \leq h \left(L_1 h + L_2 h \underbrace{|f(c, \varphi(c))|}_{\leq M} \right) \leq$$

$(1) \Rightarrow \varphi'(c) = f(c, \varphi(c))$

$$\leq h^2 (L_1 + L_2 \cdot M) = h^2 \cdot B \;\blacksquare$$

Dem th de convergență în metoda Euler

Notăm

$E_m = |\varphi(t_m) - x_m|$, $m = \overline{0, N}$ eroarea care se face dacă la momentul t_m, se folosește aproximația x_m în locul valorii exacte $\varphi(t_m)$

I. Căutăm o relație de recurență între E_{m+1} și E_m

Avem: $\varphi(t_{m+1}) = \varphi(t_m) + \int_{t_m}^{t_{m+1}} f(t, \varphi(t))\, dt$

$x_{m+1} = x_m + h \cdot f(t_m, x_m)$

$\Rightarrow E_{m+1} = |\varphi(t_{m+1}) - x_{m+1}| =$

$$|\varphi(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t,\varphi(t))dt - x_n - h f(t_n, x_n)| \le \underbrace{|\varphi(t_n) - x_n|}_{E_n} +$$

$$+ \left|\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t,\varphi(t))dt - h\cdot f(t_n,x_n)\right| = E_n + \left|\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t,\varphi(t))dt -\right.$$

$$\left. - \underbrace{h\cdot f(t_n,\varphi(t_n))}_{\cancel{f(t_n,\varphi(t_n))\int_{t_n}^{t_{n+1}} 1\,dt}} + h f(t_n,\varphi(t_n)) - h\cdot f(t_n,x_n)\right| \le$$

$$\cancel{= E_n + \left|\int_{t_n}^{t_{n+1}} (f(t,\varphi(t)) - f(t_n,\varphi(t_n)))dt\right| + h\,|f(t_n,\varphi(t_n)) - f(t_n,x_n)| =}$$

$$= E_n + \underbrace{\left|\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t,\varphi(t))dt - h\cdot f(t_n,\varphi(t_n))\right|}_{\le Bh^2 \text{ (din Lema 2)}} + \underbrace{h\,|f(t_n,\varphi(t_n)) - f(t_n,x_n)|}_{\underset{(6)}{\le} h\cdot L_2\,|\varphi(t_n) - x_n| = L_2 E_n}$$

$$\le E_n + Bh^2 + hL_2E_n \Rightarrow E_{n+1} \le E_n(hL_2+1) + Bh^2, \quad n=\overline{0,N-1}$$

II. Dem prin inducție că:

$$E_n \le \frac{(1+hL_2)^n - 1}{hL_2}\cdot Bh^2, \ \forall\, n=\overline{0,N}$$

Pt $n=0$, $E_0 = |\varphi(t_0) - \underbrace{x_0}_{}| = 0 \le \frac{(1+hL_2)^0-1}{hL_2} = 0$

Pt $n=1$, $E_1 = |\varphi(t_1) - x_1| \le \underset{\overset{\|}{0}}{E_0}(1+hL_2) + Bh^2 = Bh^2$ $\Big\} \Rightarrow$

dar $\frac{(1+hL_2)-1}{hL_2}\cdot Bh^2 = Bh^2$

$$E_1 \le \frac{(1+hL_2)^1-1}{hL_2}\cdot Bh^2$$

Presupunem proprietatea A pt n și o dem pt $n+1$:

Pt n: $E_n \le \frac{(1+hL_2)^n-1}{hL_2}\cdot Bh^2$ ș dem pt $n+1$:

$$E_{n+1} \le \frac{(1+hL_2)^{n+1}-1}{hL_2}\, Bh^2$$

EDDP
CURS 4
26.10.2011

Avem: din rel de recurență de la I:

$$E_{n+1} \le E_n(1+hL_2)+Bh^2 \le \frac{(1+hL_2)^n-1}{hL_2}\cdot Bh^2(1+hL_2)+Bh^2$$

$$= Bh^2\,\frac{(1+hL_2)^{n+1}-1-\cancel{hL_2}+hL_2}{hL_2} = Bh^2\,\frac{(1+hL_2)^{n+1}-1}{hL_2}.$$

III Demonstrăm inegalitatea din teoremă:

Avem inegalitatea cunoscută: $1+x \le e^x,\ \forall x\in\mathbb{R}$

pentru $x = hL_2 \Rightarrow 1+hL_2 \le e^{hL_2} \overset{\text{II}}{\Rightarrow} E_n \le \frac{(e^{L_2\cdot h})^n-1}{\cancel{h}L_2}\cdot Bh^{\cancel{2}} = \frac{B(e^{nhL_2}-1)}{L_2}\cdot h \Rightarrow$

Avem $nh \le N\cdot h = T$

$$\Rightarrow E_n \le \underbrace{\frac{B(e^{TL_2}-1)}{L_2}}_{=A}\cdot h \Rightarrow |\varphi(t_n)-x_n| \le A\cdot h,\quad n=\overline{0,N}$$

$$A = \frac{B(e^{TL_2}-1)}{L_2}$$

Concluzii:

1) Metoda Euler este metodă de ordin 1
2) Micșorarea lui h conduce la viteză de convergență mai mică, dar aproximare mai bună
3) Se poate considera o schemă Euler implicită astfel:

$$\begin{cases} x_0 \\ \underbrace{x_{n+1} = x_n + h\cdot f(t_{n+1}, x_{n+1})}_{x_{n+1}\text{ este soluție a acestei ecuații}}, & n=\overline{0,N-1}\end{cases}$$

Temă: Pt o problemă Cauchy dată, de exemplu $\frac{dx}{dt} = x^2 - \frac{4}{t}x + \frac{4}{t^2},\ t\in[1,3]$

$x(1) = 2$

a) determinați soluția exactă
b) reprezentați grafic soluția exactă și aproximările ce se obțin folosind schema Euler explicită pt $N\in\{3,5,10,20,50\}$

+0,5 la nota finală